Traduction
Françoise APPY
(04.2012)

Est-il vrai que certaines personnes ne sont pas bonnes en maths ? [i]

Daniel T. Willingham [ii]
(2007)

Comment fonctionne l'esprit – et en particulier, comment apprend-il ? Les décisions pédagogiques des enseignants sont un mélange de théories apprises pendant leur formation, d'essais et erreurs, de connaissances artisanales et d'instinct. De telles connaissances nous sont souvent utiles, mais existe-t-il une chose plus fiable sur laquelle nous pourrions nous appuyer ?
La science cognitive est un champ interdisciplinaire de chercheurs en psychologie, neuroscience, linguistique, philosophie, science informatique et anthropologie, soucieux de comprendre l'esprit. Dans cette colonne de American Educator*, nous considérons que les découvertes de ce champ de recherche sont importantes et assez claires pour mériter une application dans les classes.*

Question: « *Je ne suis pas bon en maths* ». Chaque année, j'entends cette phrase chez un nombre assez important de mes étudiants. En fait, je l'ai aussi souvent entendue chez des adultes. Y a-t-il quelque parcelle de vérité dans l'idée selon laquelle certaines personnes sont incapables d'apprendre les mathématiques ?

Réponse : Alors qu'il est vrai que certaines personnes sont meilleures en maths que d'autres – tout comme il est vrai que certains sont meilleurs pour écrire ou pour fabriquer des objets – il est aussi vrai que la plus grande majorité des gens sont tout-à-fait capables d'apprendre les mathématiques jusqu'au niveau de la Terminale. Apprendre les mathématiques n'est pas aussi naturel qu'apprendre à parler mais nos cerveaux possèdent l'équipement nécessaire à cela. Ainsi, apprendre les mathématiques ressemble à

---

i . *American Educator*, hiver 2009/2010, p 14-39.
Source : http://www.aft.org/pdfs/americaneducator/winter2009/willingham.pdf

ii . Daniel T.Willingham est professeur de pyschologie cognitive à l'université de Virginia. Son récent ouvrage, *Why Don't Students Like School?* a été conçu pour aider les enseignants à utiliser en classe les conclusions de la recherche sur l'esprit. Pour tous ses articles sur l'éducation voir ici : www.danielwillingham.com
Les lecteurs peuvent poser des questions particulières à « "Ask the Cognitive Scientist," American Educator, 555 New Jersey Ave. N.W., Washington, DC 20001, or to amered@aft.org.
D'autres colonnes évoqueront ces questions.

l'apprentissage de la lecture : nous pouvons le faire, mais cela prend du temps, des efforts et nécessite la maîtrise d'habiletés et de contenus de plus en plus complexes. Pratiquement tout le monde peut atteindre en lecture un niveau permettant de lire un journal sérieux et pratiquement tout le monde peut atteindre le niveau du lycée en algèbre et géométrie – même si tout le monde ne peut pas forcément ambitionner le niveau de compréhension de l'Ulysse de James Joyce ou être capable de résoudre des équations différentielles.

***

« *Je ne suis pas bon en maths* » cette phrase est entendue si souvent – et sans aucun complexe (en tout cas aux États-Unis) – qu'il semble que notre société ait accepté l'idée que les maths ne soient pas accessibles à tout le monde. Le problème est que cela est un mythe. Virtuellement, chacun est tout-à-fait capable d'apprendre les contenus et habiletés relatifs à la numération pour devenir un bon citoyen : la compréhension des procédures arithmétiques, l'algèbre, la géométrie, les probabilités, et ce d'une manière assez approfondie pour permettre la résolution des problèmes de notre vie quotidienne.

Que nous fournit la nature ?

Les hommes ont une disposition pour apprendre certains types d'informations. L'exemple le plus notable est celui du langage : dans un contexte linguistique normal, tout enfant apprend sa langue maternelle sans effort ni enseignement explicite ; en fait, il semblerait que nous ayons une connaissance innée des structures grammaticales : nos esprits sont tellement formatés pour apprendre le langage, que *nous pouvons tout de même nous améliorer* même si les sollicitations linguistiques sont mauvaises. Les enfants sourds exposés à des signes approximatifs, parviennent à modifier ce qu'ils voient pour y donner une meilleure structure linguistique [1]. Y a-t-il quelque chose de comparable pour les mathématiques ? Dans quelles mesures les enfants font-ils des mathématiques « naturellement » ? Deux importantes recherches des vingt dernières années sont très pertinentes sur la question : (1) Les humains naissent avec l'aptitude d'apprécier le concept de nombre, et (2) les humains semblent être nés avec le sens de la relation entre les nombres et l'espace. Voyons brièvement ces deux éléments.

Tout d'abord, les humains sont nés avec deux façons d'appréhender les nombres. L'une d'elles est un sens approximatif des nombres. Cela ne peut permettre une numération précise, mais nous permet de comparer deux séries d'objets et de savoir immédiatement laquelle est la plus grande. Par exemple, si vous voyez 50 haricots étalés sur une table et 100 sur une autre, vous saurez d'un seul coup d'œil, sans compter, sur quelle table il y a le plus de haricots. Des tests de laboratoire soigneusement conduits confirment que les gens peuvent utiliser leur sens naturel de la numération pour effectuer ces jugements sans considérer pour ce faire la surface occupée par les haricots, ni la densité, ou d'autres indices [2].

Bien que les très jeunes enfants ne puissent pas répondre oralement, nous savons qu'ils peuvent faire le même type de jugements. Les enfants regardent un nouvel objet jusqu'à ce qu'ils s'ennuient avec lui. Si un nouvel objet leur est présenté, ils le regarderont : mais si le même objet est présenté, ils le regarderont pendant une durée plus courte. En mesurant le temps passé à le regarder, un expérimentateur peut déterminer si l'enfant perçoit une différence entre le premier et le second objet. En utilisant cette méthodologie, les études ont déterminé si les enfants ont ce sens approximatif du nombre [3], bien que ce sens-là la ne soit pas aussi affiné que chez les adultes. Des enfants de six mois peuvent apprécier les différences numériques dans un ratio de 2 : 1 ou plus, alors que les adultes peuvent les apprécier dans un ratio de 8 : 7 (ex. : sans compter, les enfants peuvent percevoir une différence entre un groupe de 4 points et un groupe de 8 points, alors que des adultes perçoivent une différence entre un groupe de 7 points et un groupe de 8 points). De solides preuves montrent que les primates non humains [4] et les rats [5] ont aussi un sens approximatif du nombre.

L'autre circonstance dans laquelle les humains sont nés avec l'appréciation du nombre est le moyen de représenter des valeurs précises dans nos esprits, mais seulement jusqu'à la valeur de trois. Par exemple, si un enfant de 10 mois regarde un biscuit déposé dans un récipient puis deux biscuits dans un autre récipient, alors il rampe jusqu'au récipient contenant deux biscuits. Il choisit aussi trois biscuits plutôt que deux, mais par contre, il échoue s'il doit comparer deux et quatre [6]. Une expérience comparable testant des singes rhésus non entraînés a montré des performances similaires ; en fait, ils réussissent légèrement mieux que les humains, avec une aptitude à représenter mentalement des quantités allant jusqu'à quatre [7]. Les adultes perçoivent les nombres jusqu'à quatre plus ou moins instantanément et sans erreur. Les erreurs et les temps de réponse augmentent de manière importante quand le nombre augmente au-delà de quatre [8].

L'autre découverte importante dans les 20 dernières années de recherches est que les humains semblent nés avec le sens d'une relation entre les nombres et l'espace. Une diversité de preuves montre cette relation ; nous allons en voir quelques-unes. D'abord, plusieurs cultures utilisent une représentation spatiale des nombres, par exemple, via une ligne numérique. Deuxièmement, les nombres et l'espace sont représentés dans des zones du cerveau qui se chevauchent. Des lésions dans une région particulière du cerveau (sillon intra pariétal, qui est dans la partie supérieure du cerveau, vers l'arrière) conduisent à des difficultés à diriger l'attention spatiale ainsi qu'à manipuler les nombres [9]. Dans l'une des plus intéressantes démonstrations du chevauchement des mathématiques et de l'espace, un groupe de chercheurs a écrit un programme informatique analysant les données d'imagerie cérébrale afin de savoir si les sujets bougeaient leur yeux vers la droite ou vers la gauche lors d'un scanner du cerveau [10]. Ils ont ensuite appliqué leur programme de classification à des données cérébrales de sujets devant accomplir deux tâches complètement différentes : addition et soustraction. La théorie était qu'à partir de la relation entre les nombres et l'espace, la soustraction est semblable aux mouvements des yeux vers la gauche car elle diminue la quantité, et l'addition est semblable aux mouvements des yeux vers la droite car elle augmente la quantité. Remarquablement, le programme informatique (créé avec seulement les données cérébrales des mouvements des yeux) réussit à 70 % du temps à prédire si les sujets additionnaient ou retranchaient des nombres.

Néanmoins, la manière dont nous exprimons notre sens inné de la relation entre nombres et espace est clairement liée à la culture, comme le révèle l'expérience suivante. Les sujets sont assis devant un écran d'ordinateur et ont deux boutons. À chaque essai, un nombre apparaît sur l'écran et les sujets doivent appuyer sur le bouton de gauche si le nombre est pair et sur le bouton de droite s'il est impair. Quand un nombre pair apparaît, les sujets sont plus rapides pour pousser le bouton de gauche quand il s'agit de petits nombres (deux ou quatre) que lorsqu'il s'agit de nombres plus grands (six ou huit). Quand un nombre impair apparaît, ils sont plus rapides à pousser le bouton de droite pour des nombres plus grands (sept ou neuf) que pour des petits (un ou trois). En d'autres termes, les petits nombres « appartiennent » au côté gauche, et les grands nombres au côté droit. Cet effet largement répliqué n'est pas observé avant l'âge de 9 ans [11], et il est inversé chez les Iraniens adultes qui lisent de gauche à droite [12]. Ainsi, il semble très probable que, même s'il est naturel d'associer l'espace au nombre, la manière de le faire s'apprend, et elle est spécifique de conventions culturelles.

L'aptitude à énumérer précisément au-delà de quatre dépend d'un autre système culturel spécifique qui est appris et soutenu par le langage. Pour faire court, nous apprenons à compter. L'une des plus spectaculaires preuves aidant les chercheurs à comprendre le comptage comme système culturel spécifique vient des tests du Mundurucu, une tribu amazonienne. Leur langue utilise des mots pour les nombres jusqu'à cinq. Au-delà de cinq, ils disent simplement « plusieurs ». Ils peuvent utiliser leur système inné d'approximation numérique pour estimer et faire grossièrement une addition, mais ils ne peuvent pas faire d'arithmétique précise avec des nombres supérieurs à cinq [13].

Les Mundurucu ont un sens des nombres correspondant à l'espace, mais cette correspondance n'est pas linéaire. Cela signifie qu'à l'inverse d'une ligne numérique ou une règle, entre deux nombres consécutifs, il n'y a pas le même espace. Si on leur demande de repérer sur une ligne l'endroit où l'on doit représenter 1 point ou 10 points, les Mundurucu placeront les quantités 1 à 5 relativement écartées, et les quantités 6 à 10, plus serrées : la différence entre 2 et 3 sera plus grande que la différence entre 7 et 8 [iii]. Les adultes américains, au contraire, ont un sens linéaire du nombre et de l'espace : ils espacent les quantités de 1 à 10 de manière égale comme sur une ligne numérique. Mais le sens linéaire des Américains est limité à des situations dans lesquelles ils comptent. Lorsqu'on leur demande de faire la même tâche avec des quantités de points entre 10 et 100, les Mundurucu et les Américains ont les mêmes résultats. Ils octroient plus d'espace sur la ligne aux petites quantités et moins aux grandes quantités, avec une accentuation du phénomène quand ils approchent de 100 [14].

Par conséquent, il apparaît que les humains sont nés avec un sens numérique spatial, l'espace n'étant pas linéaire. Bien sûr, jusqu'à ce qu'ils aient assez d'expérience (surtout à l'école) avec la correspondance linéaire un à un entre nombre et espace caractéristique de la ligne numérique, les enfants américains réussissent l'exercice consistant à placer les points sur la ligne, de la même manière que les Mundurucu. Alors que les enfants américains de CP resserrent entre eux les grands nombres, les enfants de CE2 répartissent les grands nombres plus régulièrement, les enfants de CE1 feront alternativement les deux, en fonction de la tâche à accomplir, du jour du test, ou d'autres facteurs circonstanciels [15].

Donc, qu'est-ce qui, chez l'enfant est naturel en mathématiques ? Ils ont un sens naturel du nombre qui leur permet de comprendre et de manipuler de très petites quantités avec précision et de grandes quantités de manière approximative. Ces aptitudes n'ont évidemment qu'un lointain rapport avec les compétences que les enseignants espèrent développer chez leurs élèves, mais elles sont la base sur laquelle les enseignants peuvent construire quelque chose. Tout comme la lecture ne vient pas naturellement, mais utilise des représentations visuelles et langagières naturelles [16], il est normal de parier que les mathématiques utilisent des représentations mentales naturelles, mais qui n'ont pas évolué pour soutenir les mathématiques de la manière dont notre société avancée en a besoin aujourd'hui [17]. Pour nous enseignants, cela signifie que nous ne devrions pas attendre des élèves qu'ils apprennent les mathématiques avec facilité. Nous devrions plutôt savoir que la compétence mathématique nécessite un entretien soigneux et se développe lentement. En même temps, nous devrions garder à l'esprit que les élèves sont nés avec une aptitude pour apprendre les mathématiques, et nous ne devrions pas laisser les élèves abandonner en concluant qu'ils ne sont pas bons en maths.

De quoi les élèves ont-ils besoin pour réussir en mathématiques ?

Dans son récent rapport [iv], le *National Mathematics Advisory Panel* argumente que l'apprentissage des mathématiques nécessite trois types de connaissances : factuelles, procédurales et conceptuelles. Examinons chacune d'entre elles.

Les connaissances factuelles font référence à la possibilité d'avoir en mémoire les réponses à une relativement petite série de problèmes d'addition, soustraction, multiplication et division [v]. Les réponses doivent être bien connues afin que, lorsque survient un simple problème d'arithmétique (ex : 2 + 2), la réponse ne soit pas calculée mais simplement tirée de sa mémoire. De plus, l'extraction doit être automatique (i.e. rapide sans effort conscient). Cette extraction automatique des connaissances mathématiques de base est cruciale à la résolution de problèmes complexes parce que ceux-ci contiennent des problèmes encastrés plus simples. Par exemple, les problèmes nécessitant de longues divisions contiennent, encastrés, des problèmes de soustractions. Les élèves qui automatiquement sont capables de

---

[iii] . La relation entre le nombre et l'espace est logarithmique.

[iv] . The National Mathematics Advisory Panel's report is available at www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf

[v] . L'addition et la multiplication sont plus faciles à retenir car elles sont commutatives ; ainsi, 4 + 3 est la même chose que 3 + 4 et cela vaut aussi pour 4 x 3 et 3 x 4. Ce n'est pas le cas pour la soustraction et pour la division. Même des adultes instruits venant de pays offrant une bonne formation en mathématiques calculent les soustractions et les divisions plus qu'ils ne les connaissent de mémoire.

répondre aux soustractions maintiennent leur mémoire de travail (i.e. « l'espace » mental dans lequel intervient la pensée) libre afin de se concentrer sur le problème d'origine de division [18]. Moins l'élève consacre de sa mémoire de travail à la soustraction, plus il est susceptible de résoudre le problème avec la longue division.

L'interprétation de l'importance de la mémorisation des éléments mathématiques est soutenue par plusieurs preuves. D'abord, il est clair qu'avant d'être appris jusqu'à l'automatisme, le calcul des éléments simples d'arithmétique nécessite bien sûr de la mémoire de travail. Avec assez de pratique, cependant, les réponses peuvent être tirées de la mémoire (plutôt que calculées) n'engageant ainsi virtuellement aucun coût en mémoire de travail [19]. Deuxièmement, les élèves qui n'ont pas les réponses mathématiques en mémoire doivent alors calculer les réponses, et le calcul est plus sujet à erreur que l'extraction de la mémoire [20]. Troisièmement, la connaissance des faits mathématiques est associée à une meilleure performance sur plus de tâches mathématiques complexes [21]. Quatrièmement, quand les enfants ont des difficultés pour apprendre l'arithmétique, cela est dû, en partie, à la difficulté à apprendre ou à extraire les éléments mathématiques de base [22]. On pourrait penser que des interventions afin d'améliorer le souvenir automatique des éléments de mathématiques augmenterait aussi la compétence dans des mathématiques plus complexes. Les preuves sur ce point sont positives mais limitées [23], peut-être parce qu'automatiser les connaissances factuelles pose un problème plus persistant que les difficultés liées à l'apprentissage des procédures mathématiques [24].

Qu'en est-il des connaissances procédurales et conceptuelles, aussi jugées nécessaires par le *National Mathematics Advisory Panel* ? Une procédure est une séquence d'étapes permettant à un problème rencontré fréquemment d'être résolu. Par exemple, beaucoup d'enfants apprennent une routine consistant à « emprunter et regrouper », pour les problèmes impliquant des soustractions à retenue. Les connaissances conceptuelles elles, se réfèrent à la compréhension du sens ; savoir qu'en multipliant deux nombres négatifs on obtient un nombre positif n'est pas la même chose que savoir pourquoi.

Les « guerres des maths » menées entre les professeurs de maths et les chercheurs aux États-Unis ont très largement tourné à l'opposition entre procédures et concepts et, comme tous les débats véhéments, ont débouché sur un grand nombre de caricatures. D'un côté, les progressivistes soutiennent que les traditionnalistes n'attachent pas d'importance à la compréhension lors de l'exécution d'une procédure, et les traditionnalistes affirment que les progressivistes focalisent uniquement sur la compréhension du concept en se moquant de savoir si les élèves peuvent ou non résoudre le problème. La plupart des observateurs de ces débats mathématiques comprennent que, même si des enfants possédant la compréhension conceptuelle sont capables d'inventer des procédures de calcul appropriées [25], ce processus d'invention ne peut pas être utilisé par tous [26]. De plus, la connaissance des procédures ne garantit pas la compréhension conceptuelle : par exemple, beaucoup d'enfants peuvent exécuter la procédure de division des fractions sans comprendre pourquoi on doit faire ainsi [27]. La plupart des observateurs sont d'accord pour dire que la connaissance des procédures et des concepts est souhaitable [28].

Une chose encore plus controversée est l'emphase relative qui devrait être donnée à ces deux types de connaissances, et l'ordre dans lequel les étudiants devraient les apprendre. Peut-être avec assez de pratique et d'automaticité des algorithmes, les élèves, avec juste un peu d'aide, arriveraient à gagner une compréhension conceptuelle des procédures qu'ils ont exécutées. Ou alors, une solide compréhension conceptuelle rendrait-elle évidentes les procédures nécessaires à la résolution d'un problème.

Il y a des preuves justifiant les deux points de vue. Les connaissances conceptuelles semblent parfois précéder les connaissances procédurales ou influencer leur développement [29]. Mais aussi, les connaissances procédurales peuvent précéder les connaissances conceptuelles. Par exemple, les enfants peuvent compter avec succès avant de comprendre les propriétés du comptage, comme la pertinence de l'ordre [30].

Un troisième point de vue (et peut-être aujourd'hui le plus fréquemment admis) est que pour la plupart des sujets, il n'y a pas nécessité d'enseigner en premier les concepts ni d'enseigner en premier les procédures ; les deux devraient être enseignés de concert. Au fur et à mesure que les élèves progressent dans leurs connaissances et leur compréhension, cela soutient la compréhension des éléments à venir [31]. Bien sûr, voilà qui ressemble à du simple bon sens. Puisque ni les procédures, ni les concepts ne se développent rapidement et solidement dans la plupart des esprits des élèves sans des incitations significatives, alors pourquoi ne pas les enseigner de concert ?

Le problème des connaissances conceptuelles

De quelle manière les élèves américains réussissent-il sur ces trois types de connaissances ? Le *National Mathematics Advisory Panel* a conclu que les élèves américains possèdent des connaissances factuelles et procédurales correctes, bien qu'incomplètes, et de pauvres connaissances conceptuelles. Ces conclusions semblent solides, mais elles devraient être considérées comme provisoires car elles ne sont pas à jour, les évaluations globales étant conçues pour fournir ce type de données. Néanmoins, les études des 20 dernières années indiquent que les élèves américains, même les étudiants, n'ont pas complètement automatisé l'extraction [32] de faits pas plus qu'ils ne sont à l'aise avec les procédures [33].

Ce qui est plus troublant est l'absence de compréhension conceptuelle chez les élèves américains. Plusieurs études ont trouvé que beaucoup d'élèves comprennent partiellement le système numérique en base 10 [34]. Une collègue m'a récemment rapporté ceci dans une anecdote saisissante. Elle a mentionné que l'un de ses étudiants (en première année dans une université de bon niveau) a soutenu que 0,015 était un nombre supérieur à 0,05 parce que « 15 est supérieur à 5 ». Rien ne pouvait convaincre l'étudiant d'une autre réponse.

Un autre problème conceptuel courant porte sur la compréhension du signe égal (=) comme faisant référence à une égalité – soit une équivalence mathématique. Selon certaines estimations, seulement 25 % des américains de classe de sixième ont une compréhension profonde de ce concept [35]. Les élèves pensent souvent que cela signifie « *écrire la réponse ici* ». On a argumenté que les manuels des élèves de même que ceux destinés aux futurs professeurs de mathématique n'insistent pas assez clairement sur le sens de ce signe et ne proposent pas d'exemples de son utilisation pouvant aider à la compréhension du sens [36].

Le coût d'une faible compréhension conceptuelle doit être clair. Si vous pensez que le signe égal, signifie « *écrire la réponse ici* », vous serez perdu dès que vous verrez une équation contenant des signes de part et d'autre du signe égal. Quand un étudiant rencontre pour la première fois la factorisation, il devrait voir immédiatement le lien avec la division, mais il ne le fera pas s'il n'a pas une bonne connaissance conceptuelle de la division. (Et juste pour insister sur le fait que les connaissances factuelles, procédurales, et conceptuelles marchent ensemble, il sera aussi freiné dans la factorisation s'il n'a pas mémorisé ses tables de multiplication).

Malheureusement, parmi les trois sortes de connaissances nécessaires aux élèves, la connaissance conceptuelle est la plus difficile à acquérir. Elle est difficile parce que la connaissance n'est jamais acquise spontanément. Un enseignant ne peut pas déverser directement des concepts dans les têtes de ses étudiants. Les concepts nouveaux doivent se construire sur ce que savent déjà les étudiants. C'est pourquoi les exemples sont si utiles lors de l'introduction d'un nouveau concept [37]. Bien sûr, quand on nous fournit une définition abstraite (ex. : La déviation standard permet d'évaluer la dispersion des mesures autour de la valeur moyenne) nous demandons en général un exemple (comme « Deux groupes de personnes peuvent avoir la même taille moyenne, mais un de ces groupes contient beaucoup de grandes et de petites personnes : ainsi il a une grande déviation standard. Par contre, l'autre groupe est composé de personnes ayant une taille moyenne : ainsi, il a une faible déviation standard).

C'est aussi pourquoi les connaissances conceptuelles sont si importantes quand les élèves progressent. Les nouveaux concepts d'apprentissage dépendent de ce que vous connaissez déjà, et au fur et à mesure que les étudiants progressent, les nouveaux concepts dépendront de manière de plus en plus importante des connaissances conceptuelles déjà possédées. Par exemple, la compréhension des équations algébriques dépend de la bonne compréhension conceptuelle du signe égal. Si les étudiants ne parviennent pas à acquérir la compréhension conceptuelle, il sera plus difficile d'avancer dans les apprentissages car une nouvelle connaissance conceptuelle repose sur une ancienne. Dans ce cas, les étudiants vont de plus en plus mémoriser des algorithmes et les appliquer sans les comprendre.

Par conséquent, comment les étudiants apprennent-ils les concepts ? Aux États-Unis, on accorde beaucoup d'attention à l'utilisation des manipulations pour aider les enfants dans les concepts abstraits en mathématiques ; mais bien sûr, les manipulations sont elles aussi abstraites (l'élève doit les traiter comme le symbole d'une autre chose [38]) et elles n'aident pas toujours aux apprentissages – parfois même, elles les empêchent [39]. Cela est courant quand les manipulations sont très intéressantes visuellement et qu'elles distraient l'élève du but, ou alors quand leur relation au concept est trop obscure.

Les manipulations semblent utiles car elles sont concrètes. Pour illustrer l'idée d'une fraction, on peut diviser un biscuit en deux dans le but de le partager avec un élève. Mais l'aspect concret de cet exemple est moins important que sa familiarité [40]. Supposons que je déchire un livre en deux morceaux et dise « Regardez. Il y a maintenant deux morceaux équivalents. Chacun est la moitié du livre. » Cet exemple est concret mais moins efficace parce qu'il n'est pas familier ; l'élève n'a aucune expérience avec des livres divisés en deux, et le but du partage est inexistant. L'aspect concret n'est pas une propriété magique permettant aux enseignants de déverser du contenu dans l'esprit des enfants. C'est la familiarité qui aide, parce qu'elle permet au professeur d'inciter les élèves à penser d'une autre manière sur des sujets connus.

La familiarité n'est pas le seul ingrédient nécessaire pour de bons exemples. Les élèves sont plus susceptibles de comprendre les idées abstraites quand ils voient plusieurs exemples [41] car ils peuvent apprendre quelles propriétés sont importantes pour le concept (division de l'objet en parts égales) et quelles propriétés sont secondaires (que les parts résultantes peuvent être partagées). De manière importante, les élèves échouent fréquemment dans la compréhension du concept si on ne leur dit pas explicitement de regarder les points communs parmi les exemples, ou si on ne leur donne pas d'indices sur ces points communs [42].

Au fur et à mesure que les concepts deviennent plus difficiles, les exemples familiers issus du quotidien des élèves deviennent de plus en plus difficiles à trouver et les enseignants peuvent utiliser des analogies plus souvent ; une situation familière est présentée comme analogue au concept, non comme un exemple du concept. Ainsi, un enseignant peut dire à ses élèves que les équations algébriques peuvent être comprises comme une balance : les deux côtés sont équivalents, et vous maintenez cette équivalence aussi longtemps que vous faites la même opération sur chacun des côtés. Les études en laboratoire ont révélé plusieurs principes qui font que les analogies sont particulièrement efficaces : la familiarité (ex : les élèves savent ce qu'est une balance) ; la clarté (montrer réellement une balance aux élèves) ; la simplification de la comparaison (ex : écrire les deux côtés d'une équation sur les deux côtés d'une balance dessinée) ; le renforcement continu de l'analogie (ex : en se référant à la balance lors de moments appropriés pendant la résolution de l'équation). Des données indiquent que les professeurs de maths à Hong Kong et au Japon (où la réussite en mathématiques est invariablement haute) sont particulièrement efficaces dans l'usage des analogies selon ces principes [43].

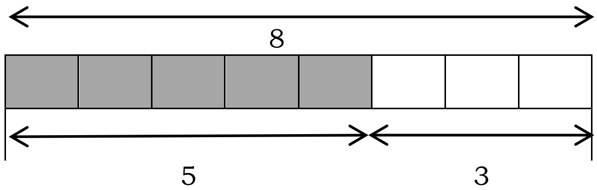
Quelles sont les applications pour l'enseignement ?

1. Penser soigneusement à la manière de cultiver la connaissance conceptuelle et trouver une analogie pouvant être utilisée pour les différents sujets. Parmi les trois types de

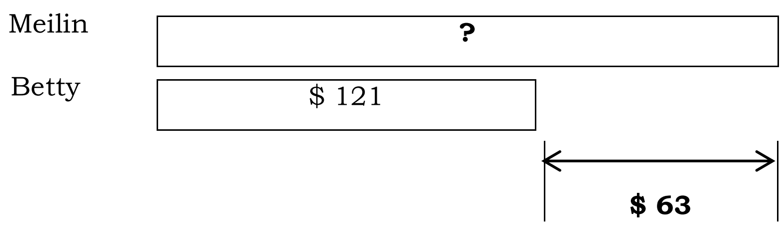
connaissances mentionnées, les connaissances conceptuelles sont les plus difficiles à apprendre pour les élèves. Voir et entendre plusieurs exemples d'un même concept est utile pour extraire l'idée centrale et comprendre quels éléments dans les exemples sont sans rapport avec le sujet. Il est aussi utile aux élèves d'apprendre une seule analogie à laquelle ils retourneront encore et encore. Utiliser la même analogie permet de rendre plus clairs les liens entre les sujets. Établir des connexions entre les sujets mathématiques approfondit les connaissances conceptuelles, mais ce but est rarement atteint aux États-Unis. Par contre, établir des connexions en construisant systématiquement à partir de modèles simples est le principe de base de la méthode de Singapour[44], qui a apparemment beaucoup de succès si on considère les hautes performances des élèves de Singapour. Les enseignants aux États-Unis ne sont peut-être pas libres d'accepter un tel programme en bloc, mais les avantages cognitifs de l'approche de ce modèle (voir encadré au-dessous) sont impressionnants.

Le modèle de Singapour utilise des modèles graphiques pour aider les élèves à comprendre les concepts mathématiques. Ces modèles sont introduits dans les petites classes en commençant avec des objets réels, mais rapidement s'opère la transition en barres, comme le montrent des deux exemples ci-dessous. Les deux modèles peuvent représenter la même fonction, dans ce cas, l'addition.

1. Le modèle Unité-fractions montre que deux parties d'une barre, comme les 5 morceaux et les 3 morceaux montrés ici peuvent aussi être considérés ensemble comme une unité de 8 morceaux.



2. Le modèle de comparaison met l'accent sur la comparaison des deux barres. Par exemple, les élèves peuvent utiliser ce modèle pour représenter le problème suivant * : *Betty a économisé $121. Elle a économisé $63 de moins que Meilin. Combien Meilin a-t-il économisé ?*



Dans les plus grandes classes, ces barres deviennent facilement des lignes numériques. Les deux modèles peuvent être utilisés pour de nombreux concepts fondamentaux en algèbre: les quatre opérations, les fractions, les proportions et les pourcentages.

* Kho Tek Hong, Yeo Shu Mei, and James Lim, The Singapore Model Method for Learning Mathematics (Singapore: PanPac, 2009), 20.

2. *En développant de plus grandes connaissances conceptuelles, ne sacrifiez pas les connaissances factuelles et procédurales.* Les connaissances procédurales ou factuelles sans les connaissances conceptuelles sont superficielles et peu susceptibles de s'appliquer à de nouveaux contextes mais les connaissances conceptuelles sans les connaissances procédurales et factuelles sont inefficaces. Liez les connaissances conceptuelles aux procédures que

les élèves sont en train d'apprendre afin que le « comment » puisse s'associer à un « pourquoi » faisant sens ; l'un renforcera l'autre [vi]. Des connaissances conceptuelles augmentées peuvent aider l'élève moyen américain à passer des simples compétences factuelles et procédurales à l'automaticité nécessaire pour être bon en résolution de problèmes. Mais si nous réduisons le travail sur les faits et les procédures, le résultat sera sans aucun doute désastreux.

3. Lors de l'enseignement des connaissances procédurales et factuelles, il faut s'assurer que les élèves parviennent aux automatismes. Expliquez-leur que l'automaticité avec les procédures et les faits est importante parce qu'elle libère leurs esprits pour pouvoir penser aux concepts. Pour l'automaticité dans les connaissances procédurales et factuelles, assurez-vous que les élèves maîtrisent les algorithmes standards. Cela nécessite la mémorisation et une pratique abondante. Pour les connaissances factuelles, assurez-vous que les élèves ont mémorisé les éléments de base, comme les tables de multiplication jusqu'à 12 x 12.

4. Choisissez un programme adapté aux connaissances conceptuelles. À partir du moment où celles-ci sont difficiles à apprendre, il est raisonnable : (1) d'étudier seulement quelques concepts par an mais en le faisant en profondeur afin qu'il y ait le temps nécessaire à la compréhension avant l'introduction du concept suivant ; (2) de séquencer les sujets en autant de morceaux que possible afin de réduire la distance mentale entre chaque concept ; le concept précédemment appris aidera à l'apprentissage des autres. Ces deux préceptes simples (accompagnés d'un troisième, la rigueur) sont exactement ce que William Schmidt a défendu, s'appuyant sur son analyse des programmes des pays performants en mathématiques).

5. Ne tolérez pas la phrase « *Je ne suis pas bon en maths* ». Nous l'entendons souvent, mais c'est rarement vrai. Il est peut-être vrai que les élèves trouvent les mathématiques plus difficiles que d'autres disciplines, mais avec de la persévérance et du travail, ils peuvent apprendre les mathématiques – et au fur et à mesure qu'ils en savent un peu plus, cela devient plus facile. En attribuant la difficulté à une qualité personnelle inamovible, l'élève dit qu'il n'a aucune prise sur son succès.

Notes de fin de texte :
[1] . Ann Senghas, Sotaro Kita, and Asli Ozyurek, "Children Creating Core Properties of Language: Evidence from an Emerging Sign Language in Nicaragua," Science 305, no. 5691 (2004): 1779-1782.
[2] . Michiel P. van Oeffelen and Peter G. Vos, "A Probabilistic Model for the Discrimination of Visual Number," *Perception and Psychophysics* 32, no. 2 (1982): 163-170; and Elise Temple and Michael I. Posner, "Brain Mechanisms of Quantity Are Similar in 5-Year-Old Children and Adults," *Proceedings of the National Academy of Sciences* 95, no. 13 (1998): 7836-7841.
[3] . Elizabeth M. Brannon, "The Development of Ordinal Numerical Knowledge in Infancy," Cognition 83, no. 3 (2002): 223-240; and Fei Xu and Elizabeth S. Spelke, "Large Number Discrimination in 6-Month-Old Infants," Cognition 74, no. 1 (2000): B1-B11.
[4] . Elizabeth M. Brannon and Herbert S. Terrace, "Ordering of the Numerosities 1 to 9 by Monkeys/' Science 282, no. 5389 (1998): 746-749.
[5] . Warren H. Meek and Russell M. Church, "A Mode Control Model of Counting and Timing Processes," Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes 9, no. 3 (1983): 320-334.
[6] . Lisa Feigenson, Susan Carey, and Marc Hauser, "The Representations Underlying Infants' Choice of More: Object Files versus Analog Magnitudes," Psychological Science 13, no. 2(2002): 150-156.
[7] . Marc D. Hauser, Susan Carey, and Lilan B. Hauser, "Spontaneous Number Representation in Semi-Free-Rang¬ing Rhesus Monkeys," Proceedings of the Royal Society of London, B: Biological Sciences 267, no. 1445 (2000): 829-833.
[8] . Lana M. Trick and Zenon W. Pylyshyn, "Why Are Small and Large Numbers Enumerated Differently? A Limited-Capacity Preattentive Stage in Vision," Psychological Review 101, no. 1 (1994): 80-102.
[9] . Arthur L. Benton, "Gerstmann's Syndrome," Archives of Neurology 49, no. 5 (1992): 445-147.
[10] . André Knops et al., "Recruitment of an Area Involved in Eye Movements during Mental Arithmetic," Science 324, no. 5934(2009): 1583-1585.

[vi] . Pour un approfondissement sur la façon de faire pour que les connaissances conceptuelles, factuelles et procédurales se renforcent les unes, les autres, voir "Basic Skills versus Conceptual Understanding: A Bogus Dichotomy in Mathematics Education" by Hung-Hsi Wu in the Fall 1999 issue of American Educator, available online at www.aft.org/pubs-reports/american_ educator/fall99/wu.pdf.

[11] . Daniel B. Berch et al., "Extracting Parity and Magnitude from Arabic Numerals: Developmental Changes in Number Processing and Mental Representation," Journal of Experimental Child Psychology 74, no. 4 (1999): 286-308.
[12] . Stanislas Dehaene, Serge Bossini, and Pascal Giraux, "The Mental Representation of Parity and Number Magnitude," Journal of Experimental Psychology: General 122, no. 3(1993): 371-396.
[13] . Pierre Pica et al., "Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group," Science 306, no. 5695 (2004): 499-503.
[14] . Stanislas Dehaene et al., "Log or Linear? Distinct Intuitions of the Number Scale in Western and Amazonian Indigene Cultures," Science 320, no. 5880 (2008): 1217-1220.
[15] . Julie L. Booth and Robert S. Siegler, "Developmental and Individual Differences in Pure Numerical Estimation," Developmental Psychology 42, no. 1 (2006): 189-201; Robert S. Siegler and Julie L. Booth, "Development of Numerical Estimation in Young Children," Child Develop¬ment 75, no. 2 (2004): 428-444; and Robert S. Siegler and John E. Opfer, "The Development of Numerical Estimation: Evidence for Multiple Representations of Numerical Quantity," Psychological Science 14, no. 3 (2003): 237-243.
[16] . Mark A. Changizi et al., "The Structures of Letters and Symbols throughout Human History Are Selected to Match Those Found in Objects in Natural Scenes," American Naturalist 167, no. 5 (2006): E117-E139.
[17] . Stanislas Dehaene and Laurent Cohen, "Cultural Recycling of Cortical Maps," Neuron 56, no. 2 (2007): 384-398.
[18] . Kerry Lee, Ee Lynn Ng, and Swee Fong Ng, "The Contributions of Working Memory and Executive Functioning to Problem Representation and Solution Generation in Algebraic Word Problems," Journal of Educational Psychology 101, no. 2 (2009): 373-387.
[19] . Steven A. Hecht, "Counting on Working Memory in Simple Arithmetic When Counting Is Used for Problem Solving," Memory and Cognition 30, no. 3 (2002): 447-155; Stuart T. Klapp et al., "Automatizing Alphabet Arithmetic: II. Are There Practice Effects after Automaticity Is Achieved?" Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition 17, no. 2 (1991): 196-209; and Loel N. Tronsky, "Strategy Use, the Development of Automaticity, and Working Memory Involvement in Complex Multiplica¬tion," Memory and Cognition 33, no. 5 (2005): 927-940.
[20] . Susan R. Goldman and James W. Pellegrino, "Information Processing and Educational Microcomputer Technology: Where Do We Go from Here? Journal of Learning Disabilities 20, no. 3 (1987): 144-154; and Ted S. Hasselbring, Laura Goin, and John D. Bransford, "Developing Math Automaticity in Learning Handicapped Children: The Role of Computerized Drill and Practice," Focus on Exceptional Children 20, no. 6 (1988): 1-7.
[21] . Voir par exemple, Robert Kail and Lynda K. Hall, "Sources of Developmental Change in Children's Word-Problem Performance," Journal of Educational Psychology 91, no. 4(1999): 660-668; et H. Lee Swanson and Margaret Beebe-Frankenberger, "The Relationship between Working Memory and Mathematical Problem Solving in Children at Risk and Not at Risk for Serious Math Difficulties," Journal of Educational Psychology 96, no. 3 (2004): 471-491.
[22] . Ulf Andersson, "Mathematical Competencies in Children with Different Types of Learning Difficulties," Journal of Educational Psychology 100, no. 1 (2008): 48-66; and Robert L. Russell and Herbert P. Ginsburg, "Cognitive Analysis of Children's Mathematical Difficulties," Cognition and Instruction 1, no. 2 (1984): 217-244.
[23] . James M. Royer and Loel N. Tronsky, "Addition Practice with Math Disabled Students Improves Subtraction and Multiplication Performance," in Advances in Learning and Behavioral Disabilities, ed. Margo A. Mastropieri and Thomas E. Scruggs (Greenwich, CT: JAI Press, 1996), 12:185-217; and Nelly Tournaki, "The Differential Effects of Teaching Addition through Strategy Instruction versus Drill and Practice to Students With and Without Learning Disabilities," Journal of Learning Disabilities 36, no. 5 (2003): 449-158.
[24] . Nancy C. Jordan, Laurie B. Hanich, and David Kaplan, "Arithmetic Fact Mastery in Young Children: A Longitudinal Investigation," Journal of Experimental Child Psychology 85, no. 2(2003): 103-119.
[25] See, for example, James Hiebert and Diana Wearne, "Instruction, Understanding, and Skill in Multidigit Addition and Subtraction," Cognition and Instruction 14, no. 3 (1996): 251-283.
[26] . See, for example, Sylvia Steel and Elaine Funnell, "Learning Multiplication Facts: A Study of Children Taught by Discovery Methods in England," Journal of Experimental Child Psychology 79, no. 1 (2001): 37-55.
[27] See, for example, Hiebert and Wearne, "Instruction, Understanding, and Skill."
[28] . Arthur J. Baroody, Yingying Feil, and Amanda R. Johnson, "An Alternative Reconceptualization of Procedural and Conceptual Knowledge," Journal for Research in Mathematics Education 38, no. 2 (2007): 115-131; and Jon R. Star, "A Rejoinder Foregrounding Procedural Knowl¬edge," Journal for Research in Mathematics Education 38, no. 2(2007): 132-135.
[29] . James P. Byrnes, "The Conceptual Basis of Procedural Learning," Cognitive Development 7 (1992): 235-257; Katherine H. Canobi, Robert A. Reeve, and Philippa E. Pattison, "The Role of Conceptual Understanding in Children's Addition Problem Solving," Developmental Psychology 34, no. 5 (1998): 882-891; James A. Dixon and Colleen F. Moore, "The Developmental Role of Intuitive Principles in Choosing Mathematical Strategies," Developmental Psychology 32, no. 2 (1996): 241-253; Hiebert and Wearne, "Instruction, Understanding, and Skill"; and Carmen Rasmussen, Elaine Ho, and Jeffrey Bisanz, "Use of the Mathematical Principle of Inversion in Young Children," Journal of Experimental Child Psychology 85, no. 2 (2003): 89-102.
[30] . Douglas Frye et al., "Young Children's Understanding of Counting and Cardinality," Child Development 60 (1989): 1158-1171.
[31] . James P. Byrnes and Barbara A. Wasik, "Role of Conceptual Knowledge in Mathematical Procedural Learning," *Developmental Psychology* 27, no. 5 (1991): 777-786; Jeremy Kilpatrick, Jane Swafford, and Bradford Findell, *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (Washington, DC: National Academy Press, 2001); Bethany Rittle-Johnson and Martha Wagner Alibali, "Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics: Does One Lead to the Other?" *Journal of Educational Psychology* 91, no. 1 (1999): 175-189; Bethany Rittle-Johnson, Robert S. Siegler, and Martha Wagner Alibali, "Developing Conceptual Understanding and Procedural Skill in Mathematics: An Iterative Process," *Journal of Educational Psychology* 93, no. 2 (2001): 346-362; and Matthew Saxton and Kadir Cakir, "Counting-On, Trading and Partitioning: Effects of Training and Prior Knowledge on Performance on Base-10 Tasks," *Child Development* 77, no. 3 (2006): 767-785.

[32] . David C. Geary, Peter A. Frensch, and Judith G. Wiley, "Simple and Complex Mental Subtraction: Strategy Choice and Speed-of-Processing Differences in Younger and Older Adults," Psychology and Aging 8, no. 2 (1993): 242-256; Jo-Anne LeFevre et al., "Multiple Routes to Solution of Single-Digit Multiplication Problems," Journal of Experimental Psychology: General 125, no. 3 (1996): 284-306; and Katherine M. Robinson et al., "Stability and Change in Children's Division Strategies," Journal of Experimental Child Psychology 93, no. 3 (2006): 224-238.
[33] . David C. Geary et al., "Computational and Reasoning Abilities in Arithmetic: Cross-Generational Change in China and the United States," Psychonomic Bulletin and Review 4, no. 3 (1997): 425-430; and David C. Geary et al., "Contributions of Computational Fluency to Cross-National Differences in Arithmetical Reasoning Abilities," Journal of Educational Psychology 91, no. 4 (1999): 716-719.
[34] . Karen C. Fuson, "Conceptual Structures for Multiunit Numbers: Implications for Learning and Teaching Multi-digit Addition, Subtraction, and Place Value," Cognition and Instruction 7, no. 4 (1990): 343-403; Anke W. Blote, Eeke van der Burg, and Anton S. Klein, "Students' Flexibility in Solving Two-Digit Addition and Subtraction Problems: Instructional Effects," Journal of Educational Psychology 93, no. 3 (2001): 627-638; and Hiebert and Wearne, "Instruction, Understanding, and Skill."
[35] . Xiaobao Li et al., "Sources of Differences in Children's Understandings of Mathematical Equality: Comparative Analysis of Teacher Guides and Student Texts in China and the United States," Cognition and Instruction 26, no. 2 (2008): 195-217.
[36] . Nicole M. McNeil et al., "Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help/' Cognition and Instruction 24, no. 3 (2006): 367-385; and Li et al., "Sources of Differences."
[37] . Rochel Gelman, "The Epigenesis of Mathematical Thinking," Journal of Applied Developmental Psychology 21, no. 1 (2000): 27-37.
[38] . David H. Uttal, Kathyrn V. Scudder, and Judy S. DeLoache, "Manipulatives as Symbols: A New Perspective on the Use of Concrete Objects to Teach Mathematics," Journal of Applied Developmental Psychology 18, no. 1 (1997): 37-54.
[39] . Nicole M. McNeil et al., "Should You Show Me the Money? Concrete Objects both Hurt and Help Performance on Mathematics Problems," Learning and Instruction 19, no. 2(2009): 171-184.
[40] . Susan Carey Conceptual Change in Childhood (Cambridge, MA: MIT Press, 1985); and Kayoko Inagaki and Giyoo Hatano, "Young Children's Spontaneous Personifica¬tion as Analogy," Child Development 58 (1987): 1013-1020.
[41] . Zhe Chen, "Schema Induction in Children's Analogical Problem Solving," Journal of Educational Psychology 91, no. 4 (1999): 703-715; and Richard E. Mayer and Mary Hegarty, "The Process of Understanding Mathematical Problems," in The Nature of Mathematical Thinking, ed. Robert J. Sternberg and Talia Ben-Zeev (Mahwah, NJ: Erlbaum, 1996).
[42] . Lindsey E. Richland, Robert G. Morrison, and Keith J. Holyoak, "Children's Development of Analogical Reasoning: Insights from Scene Analogy Problems," Journal of Experimental Child Psychology 94, no. 3 (2006): 249-273.
[43] . Lindsey E. Richland, Osnat Zur, and Keith J. Holyoak, "Cognitive Supports for Analogies in the Mathematics Classroom," Science 316, no. 5828(2007): 1128-1129.
[44] . Kho Tek Hong, Yeo Shu Mei, and James Urn, The Singapore Model Method for Learning Mathematics (Singapore: PanPac, 2009).